

Zadanie 1

Wyznacz i narysuj dziedziny naturalne poniższych funkcji.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$ (b) $f(x, y) = \arcsin \sqrt{y - \sqrt{x}}$

Zadanie 2

Zbadaj, czy poniższe ciągi punktów (na płaszczyźnie / w przestrzeni) są zbieżne. Dla ciągów zbieżnych wyznacz ich granice.

(a) $(x_n, y_n) = (\arcsin \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \sin \frac{\pi(n^2 + 1)}{2n})$ (b) $(x_n, y_n, z_n) = (\sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}, \ln \frac{n}{n+1})$

Zadanie 3

Wyznacz poniższe granice funkcji (o ile istnieją).

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y}$

Zadanie 4

Wyznacz zbiory punktów ciągłości poniższych funkcji.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x \geq 0 \\ 2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ (b) $f(x, y, z) = \frac{xy + 1}{x^2 + z^2 - 1}$

Zadanie 5

Zbadaj, czy istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu poniższych funkcji we wskazanych punktach. Skorzystaj z definicji.

(a) $f(x, y) = x \sin xy$, $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ (b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

(c) $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

Zadanie 6

Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu poniższych funkcji.

(a) $f(x, y) = e^{x^2 \sin y}$ (b) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x}$ (c) $f(x, y, z) = x^y - z^x$

Zadanie 7

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu poniższych funkcji i sprawdź, czy pochodne cząstkowe mieszane są sobie równe.

(a) $f(x, y) = xy + \frac{x^2}{y^3}$ (b) $f(x, y) = \arctg xy$ (c) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

Zadanie 8

Sprawdź, czy w przypadku poniższej funkcji f spełniona jest następująca równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zadanie 9

Oblicz poniższe pochodne cząstkowe zadanych funkcji.

(a) $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}$, $f(x, y) = xe^{-y}$ (b) $\frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x \partial y^2}$, $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y - z)$

Zadanie 10

Zbadaj różniczkowalność poniższych funkcji we wskazanych punktach. Skorzystaj z definicji.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$ (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Zadanie 11

Podaj równania płaszczyzn stycznych do wykresów poniższych funkcji we wskazanych punktach wykresu.

(a) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2)$ (b) $z = y \ln(2 + x^2 y - y^2)$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, z_0)$

Zadanie 12

Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y poniższych funkcji. Skorzystaj z reguły różniczkowania funkcji złożonych.

(a) $f(u, v) = e^{uv}$, gdzie $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctg \frac{y}{x}$
 (b) $f(u, v, w) = u^2 - v(\sqrt{u} - w)$, gdzie $u = x^2 y^2$, $v = \frac{x}{y}$, $w = 2x - y$

Zadanie 13

Wyznacz pochodne kierunkowe poniższych funkcji w zadanych punktach i kierunkach. Skorzystaj z definicji.

(a) $f(x, y) = |x - y|$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\vec{v} = (3/5, 4/5)$
 (b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
 (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = (1/2, -\sqrt{3}/2)$

Zadanie 14

Oblicz pochodne kierunkowe poniższych funkcji w zadanych punktach i kierunkach.

(a) $f(x, y) = \sin x \cos y$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$, $\vec{v} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$
 (b) $f(x, y) = \frac{z - x}{z + y}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -3)$, $\vec{v} = (-6/7, 3/7, -2/7)$

BIBLIOGRAFIA