

Temat 07: Pochodne i różniczki wyższych rzędów. Twierdzenie i wzór Taylora (z resztą w postaci Peano, Lagrange'a i Cauchy'ego). Punkty przegięcia funkcji. Warunek dostateczny na istnienie ekstremum lokalnego lub punktu przegięcia.

Zadanie 1

Policz pochodne f' , f'' , f''' dla poniższych funkcji:

- (a) $f(x) = x \ln x$ (b) $f(x) = (x^2 + x + 1) \cos x$
 (c) $f(x) = e^{\cos x}$ (d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Zadanie 2

Zbadaj, czy istnieje $f''(0)$, jeśli

- (a) $f(x) = |x|^3$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{dla } x \leq 0 \\ \sin^4 x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

Zadanie 3

Oblicz y' , y'' , y''' dla poniższych funkcji, wiedząc że funkcja f ma pochodne do trzeciego rzędu włącznie.

- (a) $y = f(x^2)$ (b) $y = f(e^x)$
 (c) $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ (d) $y = f(\ln x)$

Zadanie 4

Znajdź wzory ogólne na pochodną n -tego rzędu poniższych funkcji.

- (a) $f(x) = \sin 4x$ (b) $f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$
 (c) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

Zadanie 5

Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla poniższej funkcji, wskazanego punktu oraz n :

- (a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$, $n = 3$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$

Zadanie 6

Napisz wzór Maclaurina z resztą R_n dla poniższych funkcji.

- (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = xe^x$

Zadanie 7

Oszacuj dokładność poniższych wzorów przybliżonych.

- (a) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ (b) $e^{-x} \approx 1 - x - \frac{x^2}{2}$ dla $0 < x \leq \frac{1}{10}$

Zadanie 8

Zastosuj wzór Maclaurina do funkcji

- (a) $f(x) = e^x$ oblicz e z dokładnością 10^{-6} ,
 (b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ oblicz $\sqrt{1.01}$ z dokładnością 10^{-4} ,

Zadanie 9

Korzystając z definicji uzasadnij, że poniższe funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach.

- (a) $f(x) = 2 + |x - 1|$, $x_0 = 1$ (b) $f(x) = 4 - 3x^{100}$, $x_0 = 0$
 (c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$ (d) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq -1 \\ 2 - x & \text{dla } x > -1 \end{cases}$, $x_0 = -1$

Zadanie 10

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne poniższych funkcji.

- (a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ (b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$
 (c) $f(x) = x^x$ (d) $f(x) = x^{1/x}$
 (e) $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ (f) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$

Zadania 11

Znajdź wartości najmniejsze i największe poniższych funkcji na wskazanych przedziałach.

- (a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[-2, 5]$ (b) $f(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$
 (c) $f(x) = \arctg x - \frac{x}{2}$, $[0, 2]$ (d) $f(x) = x^2 |x^2 - 1|$, $[-2, 3]$

Zadanie 12

Określ przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia poniższych funkcji.

- (a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$ (b) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$
 (c) $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ (d) $f(x) = \sin^2 x$
 (e) $f(x) = x^2 \ln x$ (f) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

Zadanie 13

Zbadaj przebieg zmienności poniższych funkcji oraz sporządź ich wykresy.

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
 (c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$