

**Zadanie 1**

Uzasadnij poniższe równości. Skorzystaj z definicji Heinego granicy funkcji.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 7) = 1$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2) = -\infty$

**Zadanie 2**

Uzasadnij, że poniższe granice nie istnieją.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x^2$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 4} E(\sqrt{x})$       (f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \sin 2x$

**Zadanie 3**

Zbadaj, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} xE(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{\operatorname{sgn}(x^3-1)}$

**Zadanie 4**

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z twierdzeń o arytmetyce granic.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x} + 2}{\sqrt{1+x^2}}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 10^6} \frac{\sqrt{x} - 10^3}{\sqrt[3]{x} - 10^2}$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$       (f)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos x}$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x}$       (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x - 9^x}{5^x - 3^x}$

**Zadanie 5**

Uzasadnij poniższe równości. Skorzystaj z twierdzenia o trzech funkcjach.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x} = 1$       (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E(x)}{x+1} = 1$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{\ln(3^x + 1)} = \log_3 2$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^3 E(x) = 0$       (f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{E(3x)}{E(x)} = 3$

**Zadanie 6**

Uzasadnij poniższe równości. Skorzystaj z twierdzenia o dwóch funkcjach.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \sin x - x) = -\infty$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} = \infty$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} E\left(\frac{x^2}{3-x}\right) = \infty$

**Zadanie 7**

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$       (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$       (f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{\ln(3^x + 1)}$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{x}$       (h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

**Zadanie 8**

Uzasadnij ciągłość poniższych funkcji na R. Skorzystaj z definicji Heinego.

- (a)  $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$       (b)  $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$       (c)  $h(x) = \sqrt{x^4 + 2}$

**Zadanie 9**

Określ zbiory punktów ciągłości poniższych funkcji.

- (a)  $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{dla } x \neq 1 \\ |x-1| & \text{dla } x = 1 \end{cases}$       (b)  $h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$       (c)  $p(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2)}{\operatorname{sgn}(x-3)}$   
 (d)  $g(x) = E(x)$

**Zadanie 10**

Uzasadnij ciągłość poniższych funkcji na R.

- (a)  $f(x) = \begin{cases} x^4 - 1 & \text{dla } |x| \neq 1 \\ 4 & \text{dla } |x| = 1 \end{cases}$       (b)  $g(x) = E(x) \sin \pi x$

**Zadanie 11**

Określ rodzaje nieciągłości poniższych funkcji we wskazanych punktach.

- (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$       (b)  $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$   
 (c)  $h(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} + x & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2 \end{cases}, x_0 = 2$       (d)  $p(x) = \begin{cases} 1/E(x) & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \\ E(1/x) & \text{dla } x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$

**Zadanie 12**

Uzasadnij, że poniższe równania mają jednoznaczne rozwiązania w zadanych przedziałach.

- (a)  $4^x = x^2, (-1,0)$       (b)  $e^x = \frac{1}{x}, (1/2,1)$       (c)  $\operatorname{ctg} x = x, (\pi/6, \pi/3)$

Znaleźć rozwiązanie równania a) z dokładnością 1/8.