

Zadanie 1

Zbadaj, czy poniższe zbiory są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone.

- (a) $A = \{\sin p : p \in \mathbb{Z}\}$ (b) $A = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}\}$
 (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^7 - 15x^2 - 100 = 0\}$ (d) $A = \{(-3)^n : n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 2

Znajdź kresy dolne i kresy górne poniższych zbiorów. Czy w poniższych zbiorach są elementy najmniejsze i największe?

- (a) $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ (b) $B = \{\frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}_+\}$
 (c) $C = \{\frac{1}{x} : x \in (0,1]\}$

Zadanie 3

Określ dziedziny naturalne i zbiory wartości poniższych funkcji.

- (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$
 (c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = \log_3 |\cos x|$

Zadanie 4

Zbadaj, czy poniższe funkcje są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone.

- (a) $f(x) = 2^x$ (b) $g(x) = x^3$
 (c) $h(x) = \cos \frac{1}{x}$ (d) $p(x) = 1 - x^4$

Zadanie 5

Uzasadnij, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach. Skorzystaj z definicji.

- (a) $f(x) = x^3, \mathbb{R}$ (b) $g(x) = \frac{1}{x}, (0, \infty)$
 (c) $h(x) = x^4 + x^2 + 1, (-\infty, 0]$

Zadanie 6

Określ funkcje złożone $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$, jeśli

- (a) $f(x) = x^2, g(x) = 2^x,$ (b) $f(x) = 2 + \cos x, g(x) = \sqrt{x}$

Zadanie 7

Uzasadnij, że poniższe funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach.

- (a) $f(x) = x^5, \mathbb{R}$ (b) $g(x) = x^2, (-\infty, 0]$

Zadanie 8

Znajdź funkcje odwrotne do podanych.

- (a) $f(x) = 2 - \log_5 x$ (b) $g(x) = \frac{1}{2^x + 4}$ (c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$

Zadanie 9

Naszkicuj wykresy następujących funkcji.

- (a) potęgowej $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ (b) wykładniczej $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$
 (c) logarytmicznej $f(x) = \log_2 x, x \in \mathbb{R}_+$ (d) $f(x) = E(x), x \in \mathbb{R}$ (ozn. również $f(x) = [x]$)
 (e) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ (f) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} \setminus A, A = \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}\}$
 (g) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ (h) $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in \mathbb{R} \setminus A, A = \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{C}\}$
 (i) $f(x) = \arcsin x, x \in (-1, 1)$ (j) $f(x) = \arccos x, x \in (-1, 1)$
 (k) $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$ (l) $f(x) = \operatorname{arccot} x, x \in \mathbb{R}$
 (m) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ (n) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), x \in \mathbb{R}$
 (o) Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

Zadanie 10

Naszkicuj wykres funkcji.

- (a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$ (b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$
